Лекция 8. Бірінші және екінші тамаша шектер.

Бірінші тамаша шек. Құрамында тригонометриялық функциялар бар өрнектердің шектерін есептегенде бірінші тамаша шекті қолданады: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

1-мысал. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}\cdot\frac{1}{cosx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{cosx}=1$

2-мысал. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1\cdot 2x}{1\cdot 3x}=\frac{2}{3}$.

Екінші тамаша шек: $а)\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,\quad б)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\quad в)\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

Мұндағы e ≈ 2,718282… – иррационал сан.

3-мысал. Шекті есептеу керек

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)^{3x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+1}{2x+3}-1\right)^{3x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+1-2x-3}{2x+3}\right)^{3x+2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2x+3}\right)^{3x+2}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{2x+3}\right)^{\frac{2x+3}{-2}}\right]^{\frac{-2}{2x+3}(3x+2)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-6x-4}{2x+3}}=e^{-3}.$$

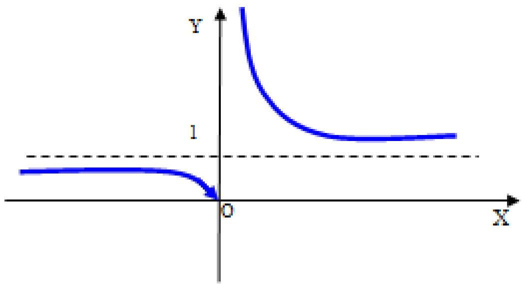
Функцияның үзіліссіздігі. Функцияның нүктедегі үзіліссіздігі ұғымын беру үшін 3 шартты келтіреміз:

1. $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде анықталған (яғни $f(x_0)$ мәні бар);
2. $x\to x_0$ (x шамасы x_0-ге ұмтылғанда) болғанда $f(x)$ функциясының ақырлы шегі $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ бар;
3. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ шегі функцияның x_0 нүктесіндегі мәніне тең: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

Егер $f(x)$функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз болмаса, онда бұл нүкте $f(x)$ функциясының үзіліс нүктесі деп аталады. Үзіліс нүктесінің екі түрі бар. Егер $f(x)$ функциясың x_0 нүктесінде оң жақты және сол жақты шектері бар болып, бірақ олар өзара тең болмаса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының ***бірінші текті үзіліс нүктесі*** деп аталады. Егер оң жақты және сол жақты шектердің ең болмағанда біреуі не шексіздікке тең болып, не жоқ болса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының ***екінші текті үзіліс нүктесі*** деп аталады. Егер $x=x_0$ нүктесінде ақырлы оң жақты және сол жақты шектер бар болып, бірақ олар осы нүктедегі функцияның мәніне тең болмаса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының ***түзетілетін үзіліс нүктесі*** деп аталады.

4-мысал. $y=e^{1/x}$ функциясы үшін $x_0=0$ нүктесі екінші текті үзіліс нүктесі болады, себебі

$$\lim_{x\to 0-}e^{1/x}=e^{\frac{1}{-0}}=e^{-\infty}=\frac{1}{\infty}=0,\qquad \lim_{x\to 0+}e^{1/x}=e^{+\infty}=+\infty$$



Егер $y = f(x)$ функциясы (a,b) аралығының әрбір нүктесінде үзіліссіз болса, онда оны (a,b) ***аралығында үзіліссіз*** дейді. Егер $y = f(x)$ функциясы (a,b) аралығында үзіліссіз болып, ал $x = a$ нүктесінде оң жақтан (яғни $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$), ал $x = b$ нүктесінде сол жақтан (яғни $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = f(b)$) үзіліссіз болса, онда $y = f(x)$ функциясын $[a,b]$ ***кесіндісінде үзіліссіз*** дейді.

Кесіндіде үзіліссіз функциялардың қасиеттері

1. Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда ол осы кесіндіде ақырлы (шенелген)

2. **Вейерштрасс теоремасы** Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда ол осы кесіндіде өзінің ең кіші және ең үлкен мәндерін қабылдайды.

3. **Больцано-Коши теоремасы** Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз және $x = a$, $x = b$ нүктелеріндегі мәндері әртүрлі таңбалар қабылдаса ($f(a)\cdot f(b) < 0$), онда $f(c) = 0$ теңдігі орындалатындай $[a,b]$ кесіндісінің ең болмағанда $c \in (a,b)$ бір нүктесі бар.